TEORÍA DE LA MEDIDA

Sesión 07

Medidas sobre álgebras y $\sigma-$álgebras

Si analizamos la medida definida por Lebesgue, podemos ver que lo que obtuvo fue una función no negativa y σ-aditiva definida sobre una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Esta idea queda recogida en la siguiente definición, con el agregado de que la medida del vacío es cero, propiedad que tiene la medida de Lebesgue y cualquier función μ no negativa y σ-aditiva definida sobre una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto dado para la cual exista un elemento E de la σ-álgebra tal que $\mu(E) < \infty$. En otras palabras, la condición $\mu(\emptyset) = 0$ es únicamente para excluir como medida a una función que asigne a todo elemento de la σ-álgebra el valor ∞.

Definición 1. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\Im$ una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \Im \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es una medida si μ es σ-aditiva y $\mu(\emptyset) = 0$.*

Definición 2. *Llamaremos espacio de medida a una terna $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$ donde $\mathbb{F}$ es un conjunto, $\Im$ una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \Im \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ una medida.*

Definición 3. *Sea $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$ un espacio de medida. Diremos que μ es finita si $\mu(\mathbb{F}) < \infty$. Diremos que μ es σ-finita si existe una colección infinita numerable de conjuntos $E_k \in \Im$ tales que $\mathbb{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y $\mu(E_k) < \infty$ para cualquier k.*

Si μ es σ-finita, los conjuntos $E_k \in \Im$ tales que $\mathbb{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y $\mu(E_k) < \infty$ para cualquier k, pueden escogerse de tal forma que sean ajenos por parejas. En efecto, los conjuntos $E_k' = E_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$ son ajenos por parejas, $E_k' \in \Im$ y $\mu(E_k') < \infty$ para cualquier k, y $\mathbb{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k'$. También pueden elegirse los conjuntos E_k de tal forma que la sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sea creciente. En efecto, si se tiene una sucesión de conjuntos $E_k \in \Im$ tales que $\mathbb{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y $\mu(E_k) < \infty$ para cualquier k, entonces, definiendo, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $E_k' = \bigcup_{j=1}^{k} E_j$, la sucesión $\left(E_k'\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente y tiene la misma propiedad.

En general, una medida se obtiene definiéndola primero para una familia de subconjuntos de un conjunto que no necesariamente forma una σ-álgebra; después se extiende a una familia más grande siguiendo el método de Lebesgue. Lo más común es buscar definirla sobre un álgebra de subconjuntos de un conjunto y después extenderla a la σ-álgebra generada por esa álgebra.

En el caso de la medida de Lebesgue, se puede ver que la propiedad básica que permite la extensión de la medida definida sobre los intervalos es el lema de Borel, de acuerdo con el cual si I es un intervalo finito de cualquier tipo (i.e. abierto, semiabierto, etc.) e $I_1, I_2, \ldots$ una cubierta de I, entonces:

$$l(I) \leq \sum_j l(I_j)$$

En el caso general, la propiedad básica que permite extender una medida sobre un álgebra es la σ-subaditividad de esa medida.

Definición 4. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es σ-subaditiva, o que satisface la propiedad de la subaditividad numerable, si dada cualquier colección infinita $A_1, A_2, \ldots$ de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Definición 5. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Diremos que una función no negativa $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es una quasi medida si es finitamente aditiva, σ-subaditiva y $\mu(\emptyset) = 0$.*

Como lo mencionamos antes, la condición de σ-subaditividad de una quasi medida definida sobre un álgebra $\mathcal{A}$ es la propiedad básica que se tiene que demostrar para poder extender esa medida a la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$. Para ese fin los siguientes dos resultados son útiles pues dan condiciones equivalentes de tal propiedad.

Teorema 1. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función no negativa y finitamente aditiva, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *μ es σ-subaditiva.*
2. *μ es σ-aditiva.*
3. *Para cualquier colección infinita $A_1, A_2, \ldots$ de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, se tiene $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \mu(A_n)$.*

En la siguiente proposición, la función μ es finita para cualquier elemento del álgebra $\mathcal{A}$; de ahí que se tengan algunas propiedades adicionales a las de la proposición anterior.

Teorema 2. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una función no negativa y finitamente aditiva, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *μ es σ-subaditiva.*
2. *μ es σ-aditiva.*
3. *Para cualquier sucesión creciente $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, se tiene $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \mu(A_n)$.*

4. *Para cualquier sucesión decreciente* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *de elementos de* $\mathcal{A}$ *tales que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, *se tiene* $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$.
5. *Para cualquier sucesión decreciente* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *de elementos de* $\mathcal{A}$ *tales que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, *se tiene* $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Teorema 3. *Sea* $\mathbb{F}$ *un conjunto,* $\mathcal{A}$ *un álgebra de subconjuntos de* $\mathbb{F}$ *y* $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *una quasi medida. Entonces, para cualquier sucesión decreciente* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *de elementos de* $\mathcal{A}$, *tales que* $\mu(A_N) < \infty$ *para alguna* $N \in \mathbb{N}$ *y* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, *se tiene:*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$$

Como corolario, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4. *Sea* $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$ *un espacio de medida. Entonces:*

1. μ *es* σ*-subaditiva.*
2. *Para cualquier sucesión creciente* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *de elementos de* $\Im$, *se tiene* $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$.
3. *Para cualquier sucesión decreciente* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *de elementos de* $\Im$ *tales que* $\mu(A_N) < \infty$ *para alguna* $N \in \mathbb{N}$, *se tiene* $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$.

Las propiedades 2 y 3 del teorema anterior dan la idea de que una medida es continua en un cierto sentido, aunque rigurosamente, para poder hablar de la continuidad de una medida se requiere que en el dominio donde está definida, en este caso una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto, se tenga definida una topología que nos permita hablar de vecindades y límites en ese dominio. No la tenemos definida; sin embargo, podemos definir lo que entendemos por el límite de una sucesión de conjuntos, cuando existe, basándonos en conceptos similares a los de límite superior e inferior de una sucesión de números reales.

Definición 6. *Si* $\mathbb{E}$ *es un conjunto y* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de subconjuntos de* $\mathbb{E}$, *definimos:*

$$\liminf_{n\rightsquigarrow\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

$$\limsup_{n\rightsquigarrow\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Si $\limsup_{n\rightsquigarrow\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$, se dice que la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y al valor común de $\liminf_{n\rightsquigarrow\infty} A_n$ y $\limsup_{n\rightsquigarrow\infty} A_n$ se le denota por $\lim_{n\to\infty} A_n$.

Obsérvese que el límite inferior de una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{E}$ es el conjunto formado por todos los elementos $x \in \mathbb{E}$ tales que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$ para cualquier $n \geq N$.

Por su parte, el límite superior de una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{E}$ es el conjunto formado por todos los elementos $x \in \mathbb{E}$ tales que $x \in A_n$ para una infinidad de números naturales n.

Obsérvese también que si la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; mientras que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, entonces $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Teorema 5. *Sea* $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$ *un espacio de medida. Supongamos que* μ *es finita y sea* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de elementos de* $\Im$ *tal que* $\limsup_{n\rightsquigarrow\infty} A_n = \liminf_{n\rightsquigarrow\infty} A_n$*, entonces la sucesión* $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente y:*

$$\mu\left(\lim_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$$

Demostración

Definamos $A = \lim A_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $B_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ y $C_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$. Entonces, la sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y la sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Además:

$\mu\left(\lim_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right) = \mu\left(\liminf_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(C_n)$

$\mu\left(\lim_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right) = \mu\left(\limsup_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(B_n)$

Por otra parte, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $B_n \supset A_n$ y $C_n \subset A_n$, así que:

$\mu(C_n) \le \mu(A_n) \le \mu(B_n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto:

$\mu\left(\lim_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(C_n) \le \liminf_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n) \le \limsup_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n)$

$\le \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\lim_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right)$

Así que, $\liminf_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n) = \limsup_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right)$.

Por lo tanto, la sucesión $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y:

$$\lim_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n\rightsquigarrow\infty} A_n\right)$$

$\blacksquare$